Następujący wynik jest standardowym twierdzeniem o minimaksie dla strategii mieszanych. Zakładamy, że funkcja wypłat danej gry jest mierzalna i ograniczona, tak więc możemy stosować twierdzenie Fubiniego i zdefiniować mieszane rozszerzenie gry.

Twierdzenie 3.3.2. *Niech $G = (S, T, g)$ będzie grą o sumie zerowej taką, że:*

(*i*) *S i T są zwartymi topologicznymi przestrzeniami Hausdorffa;*
(*ii*) *dla każdego t w T, $g(\cdot\,, t)$ jest półciągła z góry, a dla każdego s w S, $g(s, \cdot)$ jest półciągła z dołu;*
(*iii*) *g jest ograniczone i mierzalne w odniesieniu do produktu σ-algebry borelowskiej $\mathcal{B}_S \otimes \mathcal{B}_T$.*

W takim przypadku mieszane rozszerzenie G oznaczane jako $(\Delta(S), \Delta(T), g)$ posiada wartość, a dla każdego $\varepsilon > 0$, każdy z graczy dysponuje ε-optymalną strategią ze skończonym wsparciem.

Dowód. Do gier $G^+ = (\Delta(S), \Delta_f(T), g)$ oraz $G^- = (\Delta_f(S), \Delta(T), g)$ można zastosować Stwierdzenie 3.3.1. Otrzymamy dzięki temu, odpowiednio, wartości v^+ i v^-. W sposób oczywisty $v^+ \leqslant v^-$.

Niech σ (wzgl. τ) będzie optymalną strategią gracza 1 w grze G^+ (wzgl. gracza 2 w G^-). Otrzymujemy wtedy:

$$\int_S g(s, t)\sigma(ds) \geqslant v^+, \quad \forall t \in T,$$

$$\int_T g(s, t)\tau(dt) \leqslant v^-, \quad \forall s \in S.$$

A zatem, na mocy twierdzenia Fubiniego:

$$v^+ \leqslant \int\int_{S\times T} g(s, t)\sigma(ds)\tau(dt) \leqslant v^-$$

Dzięki czemu otrzymujemy szukany wynik, co kończy dowód. ■

Twierdzenie o minimaksie można otrzymać również z pomocą twierdzenia o separacji w przestrzeniach euklidesowych.

Stwierdzenie 3.3.3. *Załóżmy, że:*

(*i*) *S jest mierzalną przestrzenią, a X jest niepustym wypukłym zbiorem prawdopodobieństw nad S*
(*ii*) *T jest skończonym, niepustym zbiorem*
(*iii*) *$g: S \times T \to \mathbb{R}$ jest mierzalna i ograniczona*

W takim przypadku gra $(X, \Delta(T), g)$ *posiada wartość, a gracz 2 dysponuje optymalną strategią.*

Dowód. Definiujemy $\underline{v} = \sup_X \inf_T g(x, t)$ oraz $D = \{a \in \mathbb{R}^T : \exists x \in X, g(x, t) = \int_X g(s, t)x(ds) = a^t, \forall t \in T\}$. Zbiór D jest wypukły i rozdzielny z wypukłym zbiorem $C = \{a \in \mathbb{R}^T; at \geqslant \underline{v} + \varepsilon, \forall t \in T\}$, przy dowolnie obranym $\varepsilon > 0$.

Na mocy standardowego twierdzenia o separacji w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^T$, otrzymujemy istnienie w $\mathbb{R}^T$ pewnego b $\neq 0$ o własności takiej, że:

$$\langle b, d\rangle \leqslant \langle b, c\rangle \qquad \forall c \in C, \forall d \in D.$$

C jest dodatnio wszechstronny (ang. positively comprehensive), z czego wynika, że $b \geqslant 0$, zaś poprzez podział b przez $\sum_{t\in T} b_t$ otrzymujemy istnienie pewnego $y \in \Delta(T)$ spełniającego:

$$g(x, y) \leqslant \underline{v} + \varepsilon \quad \forall x \in X.$$

Tak więc $\overline{v} := \inf_{\Delta(T)} \sup_X g(x, y) \leqslant \underline{v} + \varepsilon$. A zatem $\overline{v} = \underline{v}$ i wartość gry $(X, \Delta(T), g)$ istnieje. Istnienie optymalnej strategii dla gracza 2 wynika ze zwartości $\Delta(T)$.

3.4. Operator wartości i gra pochodna

Ustalamy zbiory strategii S i T i badamy zmienność funkcji wypłat. Rozważmy zbiór $\mathcal{F}$ funkcji prowadzących z $S \times T$ do $\mathbb{R}$ o własności takiej, że:

(a) $\mathcal{F}$ jest wypukłym stożkiem (t. j. $\mathcal{F}$ jest stabilny względem dodawania i mnożenia przez skalar dodatni oraz $0 \in \mathcal{F}$) zawierającym funkcje stałe oraz
(b) dla każdego f w $\mathcal{F}$ gra (S, T, f) ma wartość, którą oznaczać będziemy $\mathtt{val}_{S\times T}(f) = \sup_{s\in S} \inf_{t\in T} f(s, t) = \inf_{t\in T} \sup_{s\in S} f(s, t)$, lub prościej przez $\mathtt{val}(f)$.

Oczywistym jest, że operator `val`:

(1) jest *monotoniczny*: $f \leqslant g \Rightarrow \mathtt{val}(f) \leqslant \mathtt{val}(g)$; oraz
(2) *przesuwa stałe:* $\forall t \in \mathbb{R}, \mathtt{val}(f + t) = \mathtt{val}(f) + t$.

Wynika z tego łatwy do wysnucia wniosek, w którym można użyć $\|f\| = \sup_{S\times T} |f(s, t)|$.

Stwierdzenie 3.4.1. *Operator* `val` *jest nieekspansywny:*

$$|\mathtt{val}(f) - \mathtt{val}(g)| \leqslant \|f - g\|.$$

Dowód. Z tego, że $f \geqslant g + \| f - g \|$ wynika, na mocy (1), $\mathtt{val}(f) \leqslant \mathtt{val}(g + \| f - g\|)$, zaś ostatnim wyrażeniem jest $\mathtt{val}(g) + \| f - g\|$, na mocy (2). ■